3^ Lezione

- Disequazioni algebriche .
- Disequazioni di 1° .
- Disequazioni di 2° .
- Disequazioni fattoriali .
- Disequazioni biquadratiche .
- Disequazioni binomie .
- Disequazioni fratte .
- Sistemi di disequazioni .
- Allegato Esercizi .

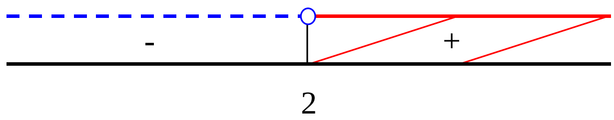
<u>DISEQUAZIONI DI 1° GRADO :</u>

Per disequazione si intende una diseguaglianza tra due espressioni algebriche. I simboli che rappresentano tale diseguaglianza sono detti simboli di maggiorazione (>) e di minorazione (<).

Risolvere una disequazione significa determinare un insieme di valori da assegnare alla variabile x affinché risulti verificata la diseguaglianza data.

$$ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b \Rightarrow x > \frac{-b}{a}$$

Es. $2x - 4 > 0 \Rightarrow x > 2$

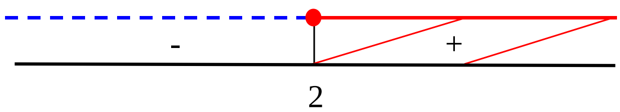


da notare che il valore di $x = 2$ non fa parte dell'insieme delle soluzioni.

Equivalentemente potremo rappresentare l'insieme delle soluzioni trovate tramite la definizione di intervallo (insieme di numeri reali limitato da due estremi , inclusi o esclusi , dallo stesso) .

E quindi dire che $x > 2$ equivalentemente significa : $\forall x \in \Re : x \in \left]2,+\infty\right[$ (intervallo aperto)

Es. $2x \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$



in questo caso il valore di $x = 2$ fa parte dell'insieme delle soluzioni.

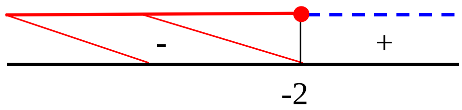
E cioè saranno soluzioni della disequazione tutte le $x \in \left[2,+\infty\right[$

Sarà possibile comunque verificare se le soluzioni sono corrette considerando un valore dell'intervallo (per es. $x = 3$) e sostituirlo alla diseguaglianza data :

$2(3) - 4 \geq 0 \Rightarrow 6 - 4 \geq 0 \Rightarrow 2 \geq 0$ che sicuramente verifica.

Da notare che se avessimo $-2x-4\geq 0$ e quindi il coefficiente del termine incognito negativo, converrà cambiare segno a tutti i termini della disequazione ricordando che con essi **cambierà necessariamente anche il verso.**

Di qui allora si avrà: $2x+4\leq 0 \quad \Rightarrow \quad x\leq -2$



<u>DISEQUAZIONI DI 2° GRADO :</u>

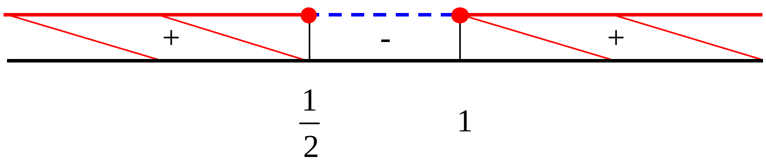
<table>
<tr><td colspan="2">$ax^2+bx+c>0$ $a>0$ $ax^2+bx+c<0$</td></tr>
<tr><td>1) $\Delta>0$ $x<x_1$ e $x>x_2$</td><td>1) $\Delta>0$ $x_1<x<x_2$</td></tr>
<tr><td>2) $\Delta=0$ $\forall x\in\Re\setminus\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$</td><td>2) $\Delta=0$ $\not\forall x\in\Re$</td></tr>
<tr><td>3) $\Delta<0$ $\forall x\in\Re$</td><td>3) $\Delta<0$ $\not\forall x\in\Re$</td></tr>
</table>

Es. $\quad 2x^2-3x+1\geq 0 \qquad \Delta=9-8=1>0$

$2x^2-3x+1=0$ equaz. associata $\qquad x_{1/2}=\frac{3\pm 1}{4}=\begin{cases} x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=1\end{cases}$

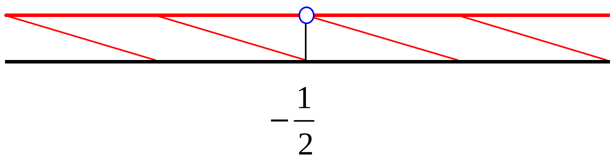
da cui si ha :

$$x \le \frac{1}{2} \quad , \quad x \ge 1$$



Es . $\quad 4x^2 + 4x + 1 > 0 \qquad \Delta = 16 - 16 = 0$

$$\forall x \in \Re \setminus \left\{ x = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \right\}$$

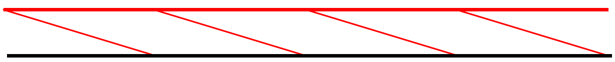


Da ricordare che un polinomio di 2° grado il cui discriminante sia nullo rappresenta sempre il quadrato di un binomio.

Per cui $\quad 4x^2 + 4x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x+1)^2 = 0$

Es. $\quad x^2 + 4x + 5 \ge 0 \qquad \Delta = 16 - 20 = -4 < 0$

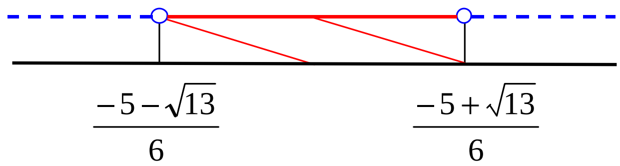
$$\forall x \in \Re$$



Es. $\quad 3x^2 + 5x + 1 < 0 \qquad \Delta = 25 - 12 = 13 > 0$

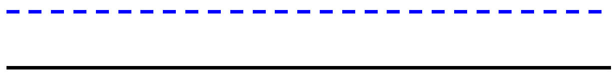
$$3x^2 + 5x + 1 = 0 \qquad x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$\frac{-5-\sqrt{13}}{6} < x < \frac{-5+\sqrt{13}}{6}$$



Es. $\quad 9x^2 + 6x + 1 < 0 \qquad \Delta = 36 - 36 = 0$

$\forall x \in \Re$



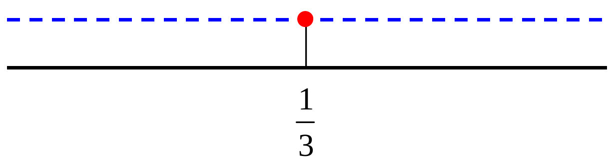
e infatti ricordiamo che :

$$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2 < 0$$

$(+) \; < \; 0$ non può mai essere vero !

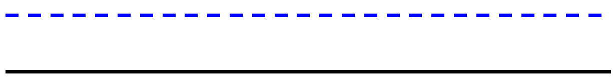
Es. $\quad 9x^2 - 6x + 1 \le 0 \qquad \Delta = 0$

$$\forall x \in \Re \setminus \left\{ x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \right\}$$



Es. $\quad 4x^2 + 2x + 2 < 0 \qquad \Delta < 0$

$\forall x \in \Re$



Ricordiamo come fatto importante che un'equazione di 2° grado del tipo :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

il cui discriminante sia $\Delta \geq 0$ è sempre scomponibile

nella forma : $$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

E quindi se abbiamo $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$ $\qquad \Delta = 9 - 8 = 1 > 0$

possiamo scrivere equivalentemente : $$2\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1) \geq 0$$

DISEQUAZIONI FATTORIALI :

Derivano da tutte le disequazioni di grado uguale o superiore al 2°.

$$A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot Z(x) \geq 0$$

Risolveremo tali tipi di disequazioni discutendo la positività di ogni singolo fattore ; quindi schematicamente avremo :

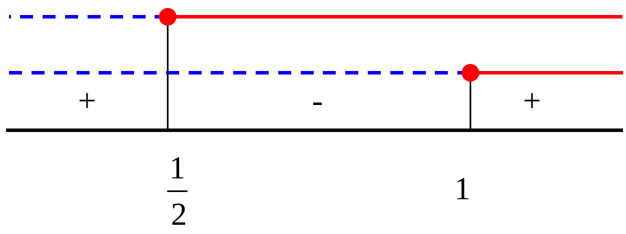
$A(x) \geq 0$
$B(x) \geq 0$
$C(x) \geq 0$
....
....
$Z(x) \geq 0$

Riprendendo l'esempio di sopra abbiamo che :

$\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x-1) \geq 0$ Risolveremo quindi come segue :

$\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{1}{2}$

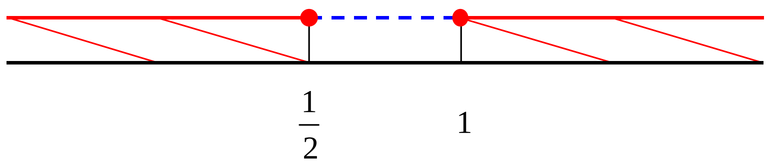
$(x-1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 1$



e cioè sarà verificata per valori esterni alle due soluzioni.

Dobbiamo infine unire tramite prodotto i risultati finali della disequazione :prenderemo come risultati che verificano la disequazione quelli che sono concordi con il segno iniziale della stessa. E quindi in questo caso abbiamo che :

$x \leq \frac{1}{2} \quad , \quad x \geq 1$



DISEQUAZIONI BIQUADRATICHE

Così come già affrontato per le equazioni , anche per le disequazioni di 4° grado mancanti dei termini di grado dispari si parla di **BIQUADRATICA.**

Simbolicamente si avrà : $ax^4 + bx^2 + c > 0$

La risoluzione di tale tipo di disequazione avverrà tramite il metodo di sostituzione :

dopo aver posto $x^2 = t$ andremo a risolvere una semplice disequazione di 2° grado nella variabile t per riportarci infine , dopo una ulteriore sostituzione , alle corrispondenti disequazioni pure nella variabile x .

Es. $ax^4 + bx^2 + c > 0$ posto $x^2 = t \Rightarrow at^2 + bt + c > 0$

$$t_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} t_1 = \dots \\ t_2 = \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = t_1 \\ x^2 = t_2 \end{cases}$$

$4x^4 - 3x^2 - 1 \le 0 \quad \Rightarrow \quad posto \quad x^2 = t \quad \Rightarrow \quad 4t^2 - 3t - 1 \le 0$

e quindi risolvendo in t troviamo $-\frac{1}{4} \le t \le +1$ il che porta a:

$$-\frac{1}{4} \le x^2 \le +1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 \ge -\frac{1}{4} \\ x^2 \le +1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \Re \\ -1 \le x \le +1 \end{cases}$$

le soluzioni finali saranno date dalla unione delle singole soluzioni;

E quindi avremo che $-1 \le x \le +1$.

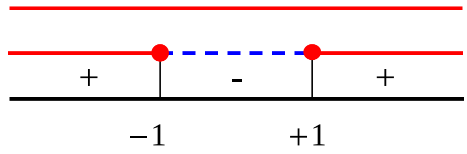
Ricordiamo che la soluzione poteva essere trovata anche in altra maniera:

$4x^4 - 3x^2 - 1 \le 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = t \quad \Rightarrow \quad 4t^2 - 3t - 1 \le 0$ e poiché $\Delta \ge 0$

ricordando che $at^2 + bt + c = 0 \quad \Rightarrow \quad a(t - t_1) \cdot (t - t_2) = 0$ allora avremo:

$4\left(t + \frac{1}{4}\right) \cdot (t - 1) \le 0$ da risolvere come disequazione fattoriale:

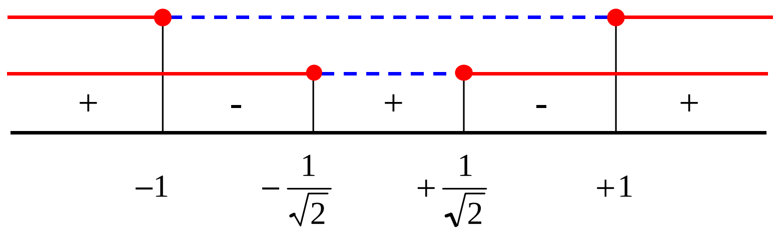
$$4\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(x^2-1\right)\leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+\dfrac{1}{4}\geq 0 & \Rightarrow \quad \forall x\in\Re \\ x^2-1\geq 0 & \Rightarrow \quad x\leq -1\,;\, x\geq +1 \end{cases}$$



E quindi avremo che : $\quad -1\leq x\leq +1$.

Es. $\quad 2x^4-3x^2+1\geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x^2-1\right)\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-\dfrac{1}{2}\geq 0 \\ x^2-1\geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x\leq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;\, x\geq +\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x\leq -1\,;\, x\geq +1 \end{cases}$$



e quindi $\qquad x\leq -1 \quad ; \quad -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq +\dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad x\geq -1$

DISEQUAZIONI BINOMIE

Come visto per le equazioni anche per le disequazioni di grado superiore al 2° costituite da un polinomio di soli due termini (binomio) si parla di disequazione **binomia** .

La forma sarà del tipo $\quad ax^n+b>0$

La risoluzione corretta di tale tipo di equazione avverrà tramite corrispondente equazione fattoriale .

Es: risolvere : $x^4 - 1 < 0$

$$x^4 - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2-1)(x^2+1) < 0 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < +1$$

Es: risolvere : $x^3 - 8 \geq 0$

$$x^3 - 8 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x^2+2x+4) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 2$$

Es: risolvere : $x^6 - 64 > 0$

$$x^6 - 2^6 > 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2)^3 - (2^2)^3 > 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2-4)(x^4+4x^2+16) > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -2 \;,\; x > +2$$

Da un punto di vista oggettivamente pratico , benchè il metodo corretto sia quello enunciato dianzi , possiamo risolvere una disequazione binomia in maniera più semplice:

a) come una disequazione di 2° grado pura (se di indice n-pari) ,
b) come una disequazione di 1° grado , con la relativa estrazione di radice ,(se di indice n-dispari).

Sinteticamente :

$$ax^n + b > 0 \quad \Rightarrow \quad x^n > -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad x < -\sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \;,\; x > +\sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \quad (\, n - pari \,)$$

$$ax^n + b < 0 \quad \Rightarrow \quad x^n < -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad -\sqrt[n]{-\frac{b}{a}} < x < +\sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \quad (\, n - pari \,)$$

$$ax^n + b > 0 \quad \Rightarrow \quad x^n > -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad x > \sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \quad (\, n - dispari \,)$$

Riesaminando gli esempi precedenti si ha :

Es: risolvere : $x^4 - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < +1$

Es: risolvere : $x^3-8\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x^3\geq 8 \quad\Rightarrow\quad x\geq\sqrt[3]{8} \quad\Rightarrow\quad x\geq\sqrt[3]{2^3} \quad\Rightarrow\quad x\geq 2$

Es: risolvere : $x^6-64>0 \quad\Rightarrow\quad x^6>64 \quad\Rightarrow\quad x<-2 \quad , \quad x>+2$

Es: risolvere : $x^3+3\leq 0 \quad\Rightarrow\quad x^3\leq -3 \quad\Rightarrow\quad x\leq\sqrt[3]{-3} \quad\Rightarrow\quad x\leq -\sqrt[3]{3}$

Es: risolvere : $x^8+5>0 \quad\Rightarrow\quad x^8>-5 \quad\Rightarrow\quad \forall x\in\Re$

<u>DISEQUAZIONI FRATTE</u>

Così come le equazioni fratte , le disequazioni si presentano nella forma :

$\dfrac{A(x)}{B(x)}\geq 0$ opp. $\dfrac{A(x)}{B(x)}\leq 0$

La loro risoluzione ricalca identicamente il metodo usato per le fattoriali :quindi indipendentemente dal segno si discuterà la positività del singolo numeratore e del singolo denominatore.
E quindi sarà :

$$\begin{aligned} &A(x)\geq 0 \\ &B(x)>0 \end{aligned}$$

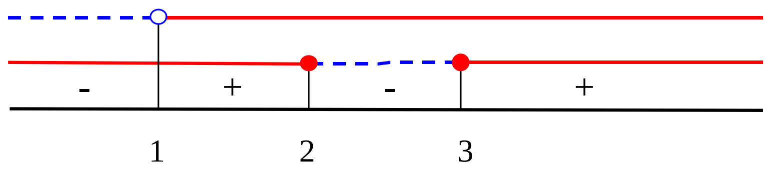
di qui ci comporteremo come per le fattoriali

N.B. come si può notare per la realtà di una frazione il denominatore non può essere mai nullo (quindi $B(x)>0$ e non $B(x)\geq 0$).

Es. $\dfrac{x^2-5x+6}{x-1}\geq 0$

$N \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 2 \, ; x \geq 3$

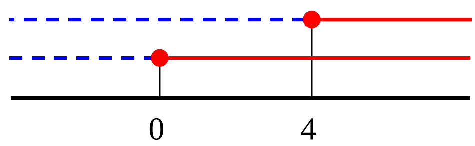
$D > 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1$



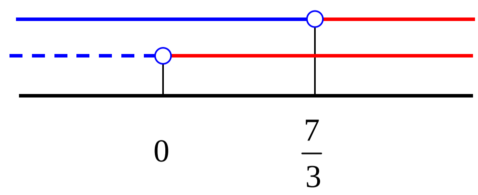
quindi il risultato finale sarà $\quad +1 < x \leq 2 \quad , \quad x \geq 3$

Es. $\quad \dfrac{2x(x-4)}{3x^2 - 7x} \leq 0$

$N \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(x-4) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 4 \end{cases}$



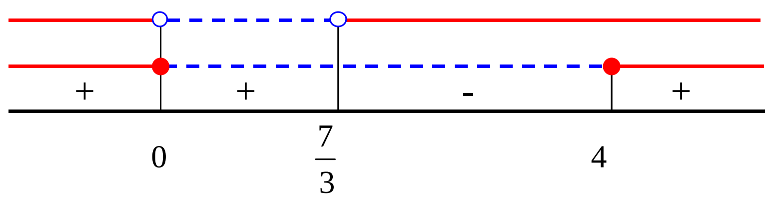
$D > 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 7x > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0 \; ; \; x > \dfrac{7}{3}$



per cui avremo :

$N \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 0 \; ; \; x \geq 4$

$D > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0 \; ; \; x > \dfrac{7}{3}$



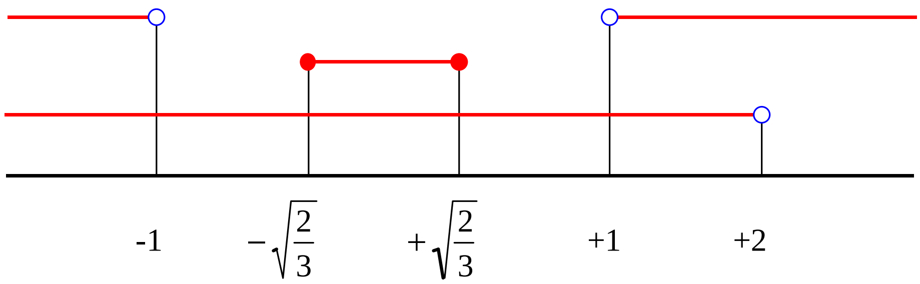
da cui i risultati finali che sono : $\quad \dfrac{7}{3} < x \leq 4$

SISTEMI DI DISEQUAZIONI :

Per sistema di disequazioni intendiamo l'insieme di due o più disequazioni . Risolvere tale sistema significa determinare quell'insieme di valori da attribuire alla incognita x affinché le singole diseguaglianze siano contemporaneamente verificate (valuteremo le intersezioni della linea continua).

Es. $\begin{cases} 2x-4<0 \\ -3x^2+2\geq 0 \\ \dfrac{x+1}{x-1}>0 \end{cases}$ andiamo a risolvere singolarmente ogni disequazione ;

$$\begin{cases} x<2 \\ -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\leq x\leq +\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ x<-1 \;\; ; \;\; x>+1 \end{cases}$$



e quindi non essendo la linea continua presente contemporaneamente per le tre disequazioni, concluderemo che il sistema non ha soluzioni.

ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI DI 1°E DI 2°GRADO

ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL 2°

ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI FRATTE

ESERCIZI SUI SISTEMI DI DISEQUAZIONI

USO DEI PULSANTI

?	Visualizza solo la soluzione dell'esercizio
RISOLVI	Visualizza le soluzioni di tutti gli esercizi
NASCONDI	Nasconde le soluzioni
ESERCIZI	Torna all'indice degli esercizi
INDICE	Torna all'indice della lezione

Risolvere le seguenti disequazioni di primo e di secondo grado :

1. $3x - 7 \geq 0$?

2. $3x - 27 \leq 0$?

3. $-4x + 16 \geq 0$?

4. $-3x - 6 \geq 0$?

5. $5x - 13 \geq 0$?

6. $3x^2 - 4x + 1 < 0$?

7. $2x^2 + 3x - 2 > 0$

?

8. $x^2 + 6x - 3 > 0$

?

9. $x^2 - 4x - 5 \leq 0$

?

10. $-x^2 - x + 3 < 0$

?

11. $(-x-2)^2 - (-2x+1)^2 > 8x$

?

12. $x^2 + 12 < 0$

?

13. $9x^2 - 25 > 0$

?

14. $-4x^2 - 6 < 0$

?

15. $16x^2 + 5 > 0$

?

?

16. $\frac{1}{5}x^2 - 2x + 5 \leq 0$

17. $7x-3(x-4)+x^2 \geq 2x+1$

?

18. $8-3x^2 \geq 2(x+3)-1$

?

19. $-2\left(\frac{x}{2}-1\right)^2 \le 2x-\frac{3}{4}$

?

20. $-(2x-3)^2 > 2x-3\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}\right)$

?

Risolvere le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo :

21. $x^3 - 4x^2 + 7x - 4 \geq 0$

?

22. $-x^3 - 2x^2 + 5x + 6 \leq 0$

?

23. $x^3 - 5x + 2 \geq 0$

?

24. $x^3 - 2x^2 - x + 2 \leq 0$

?

25. $x^3 - 8x - 8 < 0$

?

26. $x^4 + 7x^3 + 17x^2 \leq 0$

?

27. $x^4 - 3x^2 + 2 \leq 0$

?

28. $x^4 - 7x^2 + 12 > 0$

?

29. $4x^4 - 3x^2 - 1 \geq 0$

?

30. $3x^4 - 8x^2 + 5 \leq 0$

?

31. $x^5 - 1 \geq 0$

?

32. $x^5 + 32 < 0$

?

33. $x^7 - 13 \geq 0$

?

34. $(x+6)^3 \geq 0$

?

35 . $x^3 - 27 \leq 0$

?

36. $-x^{11} - 13 \geq 0$

?

37. $(-x+4)^4 \geq 0$

?

38. $x^6 - 1 \geq 0$

?

39. $x^4 - 1 < 0$

?

40. $(2x-3)^6 \leq 0$

?

Risolvere le seguenti disequazioni fratte :

41. $\frac{x-1}{2x-2}-3<\frac{3-x}{x}$

?

42. $\frac{x-3}{x}>\frac{5x+6}{2}$

?

43. $\dfrac{4x+1}{2x+1}-\dfrac{1}{x}>1$

?

44. $2x-\frac{x-1}{x-2}<\frac{4x-1}{2}$

?

45. $\frac{-x+1}{x-1}-\frac{5x}{x-2}\le 0$

?

46. $\frac{2x+3}{x-3}+\frac{-x+2}{2x-2}\geq\frac{3}{2}$

?

47. $1+\frac{6-2x}{2x-5}>4x$

?

48. $\frac{x-5}{2x-6}-\frac{1}{2}<\frac{2x-3}{x-3}$

?

49. $\dfrac{3x}{-x+3} \geq 2 - \dfrac{2x+1}{x^2-9}$

?

50. $\frac{1}{x-1} < \frac{x^2}{(x-1)} - \frac{1-x}{2-x}$

?

Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni :

51. $\begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ -x^2 - 2x + 3 < 0 \end{cases}$

?

52. $\begin{cases} -2x^2 + 5x - 3 > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases}$

?

53. $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 \\ -3x + 3 \leq 0 \\ 15x - 5 \geq 0 \end{cases}$

?

54. $\begin{cases} x^2 + 2x + 4 > 0 \\ x^2 - x < 0 \\ -x^2 - 2x + 1 > 0 \end{cases}$

?

55. $\begin{cases} \dfrac{5x}{2}-\dfrac{x+2}{6}<\dfrac{3}{2}(2-x) \\ \dfrac{x^2-1}{3}+2>\dfrac{x+1}{4}+x \end{cases}$?

56. $\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{4}-\dfrac{x-2}{2}<1+\dfrac{1-x}{2} \\ x^2-(x+1)\geq x-1 \end{cases}$?

57. $\begin{cases} x^3-2x<0 \\ -2x-5>0 \\ 4-x<0 \end{cases}$

?

58. $$\begin{cases} \dfrac{x}{4}-\dfrac{2x+1}{2}>(2-3x) \\ \dfrac{x^2-1}{5}>\dfrac{x+3}{2} \end{cases}$$

?

59. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x-3}{2}<\dfrac{3x}{2} \\ \dfrac{x^2+1}{4}-\dfrac{3x}{2}>x \end{cases}$

?

60. $\begin{cases} \dfrac{2x^2-2}{3}+\dfrac{-x+1}{6}>\dfrac{2-x}{3} \\ x^2+(-x-1)>-3 \end{cases}$

?